

Série 13 : introduction à la physique statistique

1.10.11 Système magnétique à deux niveaux

On considère un système physique composé d'un grand nombre de moments magnétiques $\boldsymbol{\mu}$ qui ne peuvent adopter que deux orientations possibles. Ils sont alignés ou anti-alignés avec un champ magnétique extérieur $\boldsymbol{B} = B\hat{z}$. Donc on a $\boldsymbol{\mu} = \mu\hat{z}$ ou $\boldsymbol{\mu} = -\mu\hat{z}$. Leurs énergies sont déterminées par la relation $E = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$.

1. Montrer que l'énergie moyenne du système vaut :

$$\langle E \rangle = -\mu B \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

2. Montrer que la projection moyenne du moment sur l'axe Oz s'écrit :

$$\langle \mu_z \rangle = \mu \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

3. Lorsque $T \rightarrow \infty$, montrer que $\langle \mu_z \rangle \propto 1/T$. Ce comportement est connu comme la loi de Curie.

1.10.12 Potentiel chimique d'une solution idéale

Une solution est modélisée par un réseau de $N + n$ boîtes. Il y a N boîtes qui contiennent une molécule d'eau chacune et n boîtes qui contiennent une molécule du soluté chacune. On rappelle, avec les notations usuelles, que $G = H - TS$. On suppose qu'il n'y a pas d'interactions entre les molécules, alors $H = Nh_0 + nh_s$, une somme d'enthalpies de formation.

1. Expliquer pourquoi le nombre de configuration vaut : $\Omega = \frac{(N+n)!}{n!N!}$.
2. En déduire l'entropie statistique de Boltzmann. Appliquer l'approximation de Stirling : $\ln(x!) = x \ln(x)$. Montrer que le résultat peut se mettre sous la forme $S = k_B N \ln\left(\frac{N+n}{N}\right) - k_B n \ln\left(\frac{n}{N+n}\right)$.
3. Simplifier sous la condition $N \gg n$ avec l'approximation $\ln(1+x) = x$. Compte tenu de $\mu_s = \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{T,P,N}$, montrer que :

$$\mu_s = h_s + k_B T \ln\left(\frac{n}{N}\right) \quad (1.59)$$

3.5.3 Passage adiabatique

Avec un modèle très simple, on peut modéliser une *désaimantation adiabatique*. Ce processus est le suivant : quand le système composé de moments magnétiques permanents est couplé à un réservoir thermique, on enclenche un champ magnétique $\mathbf{B} = B\hat{z}$. On découple alors le système de ce bain thermique et on abaisse le champ. Ce processus est donc adiabatique. De plus, on supposera qu'il est réversible, alors il est isentropique. On appliquera les outils de la physique statistique à un modèle à deux niveaux dans le but de trouver comment la température $T(B)$ va changer dans ce processus.

On considère un ensemble de noyaux d'un solide soumis à un champ magnétique B dans la direction z . Les noyaux portent chacun un moment magnétique ne pouvant se trouver que dans deux états possibles : ou bien le moment est dans le sens du champ, ou bien il est dans le sens opposé. On notera par (+) et (-) les deux états. Le moment magnétique nucléaire est un vecteur de norme μ_B . Les énergies des moments magnétiques des noyaux sont ainsi :

$$E_+ = \mu_B B, \quad E_- = -\mu_B B$$

Le nombre de noyaux dans ces états sont notés N_+ et N_- . On introduit la polarisation

$$P = \frac{N_- - N_+}{N_- + N_+}$$

et les probabilités $f_+ = N_+/N$ et $f_- = N_-/N$ d'être dans ces deux états.

1. Montrer que l'entropie statistique S de Shanon (3.11) peut s'écrire :

$$S = k_B \left(\ln 2 - \frac{1+P}{2} \ln(1+P) - \frac{1-P}{2} \ln(1-P) \right)$$

2. Appliquer la distribution de Boltzmann pour obtenir une expression de la polarisation P en fonction du champ d'induction magnétique B .
3. Si on commence le processus adiabatique à B_i et termine à B_f , prédire la température finale T_f en fonction de la température initiale T_i . Supposez $P \ll 1$.

3.5.4 Entropie du gaz parfait

La fonction de partition d'une particule d'un gaz parfait est donnée par (1.40) :

$$z = V \left(\frac{2\pi}{\beta m} \right)^{\frac{3}{2}}$$

1. Se convaincre que la fonction de partition pour un gaz parfait de N particules vaut $Z = \frac{z^N}{N!}$. Par la suite, on appliquera la formule de Stirling $\ln(x!) = x \ln(x)$.
2. Partant de la condition de normalisation (3.6) et la relation (3.9) pour l'entropie statistique, montrer que l'entropie peut se calculer à partir de la fonction de partition $Z = \int_{(X)} \exp\left(-\frac{H(X)}{kT}\right)$ par :

$$S = k_B \left(\ln(Z) - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z) \right)$$

3. Montrer alors qu'on obtient pour le gaz parfait :

$$S(T, V, n) = nR \left(\ln \left(\frac{V}{n} \right) + \frac{3}{2} \ln(T) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2\pi k_B}{m} \right) - \ln(N_A) \right)$$

où $n = N/N_A$ est le nombre de moles, N_A le nombre d'Avogadro. Comparer au résultat purement thermodynamique (Thermodynamique, §5.8.6) qui ne permettait pas de stipuler entièrement la fonction $S(T, V, n)$.